GEOMETRIA 6/3/14

-CALCOLARE DISTANZE E ANGOLI TRA LE SEGUENTI COPPIE DI VETTORI IN $\mathbb{R}^3$:

a) $\underset{v}{\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}}$ $\quad d(v,w) = \|v-w\|_{\mathbb{R}^3} = \left\|\begin{pmatrix}-2\\-6\\4\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{4+36+16} = \sqrt{56}$

$\cos(\angle(v,w)) = \dfrac{\langle v|w\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|v\|_{\mathbb{R}^3}\cdot\|w\|_{\mathbb{R}^3}} = \dfrac{8-5-3}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{16+25+1}} = 0$ (v·w) SE $\cos\theta = 0$ I VETTORI SONO ORTOGONALI TRA LORO

b) $\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $\quad d(v,w) = \|v-w\|_{\mathbb{R}^3} = \left\|\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$

$\cos(\angle(v,w)) = \dfrac{30-4-2}{\sqrt{(36+16+1)(25+1+4)}} = \dfrac{24}{\sqrt{53\cdot 30}}$

- TROVARE TUTTI I VETTORI IN $\mathbb{R}^3$ ORTOGONALI A $\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$, AVENTI SOMMA DELLE COORDINATE NULLE, E NORMA 1

- SI TROVA UN VETTORE CHE SODDISFI $\begin{cases}2x-5y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$ E CHE PER OGNI $\lambda\cdot v$ CONTINUI A SODDISFARLE:

TROVO UNA RETTA SU CUI DEVO PRENDERE I DUE VETTORI DI NORMA 1: $\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}$ $\quad 2a-5b+a+b=0$

$a = 6b$

POTENZIANDO $b=1$

$\pm\dfrac{1}{\sqrt{36+1+49}}\begin{pmatrix}6\\1\\-7\end{pmatrix}$

- PROVARE CHE SE $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ CON A SIMMETRICA È DEFINITA POSITIVA ALLORA A HA COEFF. >0 SULLA DIAGONALE

$A = \begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ DEFINITO POSITIVO $\leftrightarrow$ $a>0$, $\det(A)>0$ $\quad <?>0$

$A = \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ DEFINITO POSITIVO $\leftrightarrow$ $\det$ (EVIDENZIATO) >0

devono essere simmetriche $\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$

* PROPRIETÀ DELLA NORMA: $\|v\|\geq 0$ $\forall v$
(1) $\|0\| = 0$
(2) $\|\lambda\cdot v\| = |\lambda|\|v\|$

- SE $v_1, \dots, v_h$ BASE $\perp$ $\in V$, $\forall v \in V$ $v = \sum_{i=1}^{h} \dfrac{\langle v|v_i\rangle}{\|v_i\|^2}\cdot v_i$

ES. $B = \underset{v_1}{\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix}-1\\26\\-11\end{pmatrix}}$ SE VERIFICO CHE SONO $\perp$ SONO LIN. IND. È UNA BASE DI $\mathbb{R}^3$:

$\langle v_1|v_2\rangle = 12-2-10 = 0$

$\langle v_1|v_2\rangle = -4+26-22 = 0$

$\langle v_1|v_2\rangle = -3-52+55 = 0$

ES. $\left[\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}(-12+5+2)/(16+1+4)\\ \vdots\end{pmatrix}$ $\quad *_2 = (v_1)^2$, LA NORMA DI v_1

$*$ moltiplicare componenti di v con v_1

- DATA UNA BASE $v_1, \dots v_h \in V$ (SPAZIO VETTORIALE CON $\langle\cdot|\cdot\rangle$), SI TROVA UNA BASE ORTONORMALE:

$u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$; $\left(y_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k}\langle x_{k+1}|v_i\rangle\cdot v_i\right)$ $\quad u_2 = v_2 - \langle v_2|\dfrac{v_1}{\|v_1\|}\rangle\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ $\quad 5-21+3 = -10$

ES. $\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\3\\-1\end{pmatrix}$ $\quad u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{62}}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ $\quad \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix}\middle|\dfrac{1}{\sqrt{62}}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}\right\rangle\dfrac{1}{\sqrt{62}}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} - \dfrac{-10}{62}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{31}\begin{pmatrix}134\\-58\\46\end{pmatrix}$

quello che trovo è $\perp$ al precedente

$\left\langle\begin{pmatrix}134\\-58\\46\end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}\right\rangle = 268-406+138 = 0$ ✓

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

master
COPY
COPISTERIA
050/8312126 388/9837745

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA → QUANTE VOLTE λ (AUTOVALORE) ANNULLA p_A (POLINOMIO CARATTERISTICO)

ES. $p_\lambda = (2-t)(-1-t)(2-t)$ con $t=2$ $m.a = 2$ (NUMERO DI λ UGUALI)

MOLTEPLICITÀ GEOMETRICA → dim CORRISPONDENTE AUTOSPAZIO

$m.g(\lambda) = \dim V - \operatorname{rank}(A - \lambda I)$

ES. MATRIX 3×3 $\in \mathbb{R}^3$

↓

$m.g.\ 3 - \operatorname{rank} * = \boxed{n}$

DATA A: $\begin{bmatrix} m\pm\lambda & 9 & r \\ m & m\pm\lambda & s \\ 0 & p & m\pm\lambda \end{bmatrix}$

SOST. IN A IL VALORE DI λ CREDUTO LA MATRICE I E NE CALCOLI IL rank

CURVATURA NELLO SPAZIO ($\mathbb{R}^3$)

$k(t) = \dfrac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$ $\quad \alpha' \wedge \alpha'' = (a_2b_3 - b_2a_3,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$

$\alpha' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\alpha'' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

TORSIONE IN $\mathbb{R}^3$

$t = \dfrac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \mid \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$

OTTENUTO IL VETTORE $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$, COME VISTO SOPRA, MOLTIPLICHIAMO LE COMPONENTI CON $\alpha'''(t)$

$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ $\alpha'''(t) = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$ $\left(\alpha'(t) \wedge \alpha''t \mid \alpha'''(t)\right) =$

$= \begin{pmatrix} Ad \\ Be \\ Cf \end{pmatrix}$ ADESSO $\left\langle \begin{pmatrix} Ad \\ Be \\ Cf \end{pmatrix} \right\rangle = Ad + Be + Cf$

RIFERIMENTO DI FRENET $\mathbb{R}^3$

→ VETTORE TANGENTE $t = f'(t)/\|f'(t)\|$ Ⓐ SE PARAMETRIZZATO SECONDO LA LUNGHEZZA D'ARCO ALLORA $t = f'(x)$

→ VERSORE NORMALE $n = \dfrac{\tilde{n}}{\|\tilde{n}\|}$, $\tilde{n} = f''(t) - \langle f''(t), t \rangle \cdot t$

→ VETTORE BINORMALE $b = t \wedge n =$

Ⓐ $\|\alpha'(t)\| = 1\ \forall t$

CURVE SEMPLICI E REGOLARI

→ REGOLARE SE E SOLO SE $\alpha'(t) \neq 0\ \forall t$ $\quad \alpha'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ SEMPLICE SE NON SI INTERSECA CON SE STESSA, OVVERO SE $\alpha'(t) > 0$, È SEMPRE DERIVABILE?

↓

PRENDENDO t_1, t_2 CHE $\to t_1 \neq t_2$ DEVE RISULTARE $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ → PER $t_1 \in I$ e $t_2 \notin I$

INTEGRALI

- CALCOLARE $\int_\alpha \cos(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy)$ $\quad \alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ \pi t \end{pmatrix}$ $\quad t\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

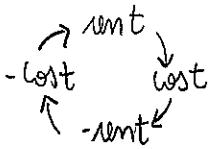
$$\int_{-1/2}^{1} \cos(\pi t + \pi t^2)(\pi t + \pi + \pi t) = \int_{-1/2}^{1} \cos(\pi t + \pi t^2)\cdot(2\pi t + \pi)$$

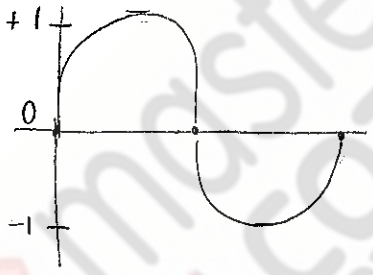
$$= \int_{-1/2}^{1} \cos(\pi t + \pi t^2) =$$

$$\int_a^b f(g)\cdot g' = \int_a^b f(g)$$

$$\left[+\operatorname{sen}(\pi t + \pi t^2)\right]_{-1/2}^{1} = -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \cancel{\operatorname{sen}(\pi + \pi)}^{0} \to -\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$ ✓





ANGOLO θ E DISTANZA d FRA VETTORI

$v\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ $w\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\cos\alpha(v,w) = \frac{\langle v|w\rangle}{\|v\|\,\|w\|} = \frac{-3+20}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{1+25}} = \frac{17}{5\sqrt{26}} \quad \theta = \arccos\left(\frac{17}{5\sqrt{26}}\right)$$

$$d(v,w) = \|v-w\| = \left\|\begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}\right\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

CURVATURA IN $P(x;y)$ CON $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x \\ \cdot \end{pmatrix}$

$$K(t) = \frac{\det(\alpha'(t)\cdot\alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3} \qquad \alpha(t) = \begin{pmatrix} t + \ln(1+t) \\ \cos t - 3t \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{1+t} \\ -\operatorname{sen} t - 3 \end{pmatrix} \qquad \alpha''(t) \begin{pmatrix} -1/(1+t)^2 \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$K(t) = \frac{\det\begin{pmatrix} \frac{2+t}{1+t} & -\frac{1}{(1+t)^2} \\ -\operatorname{sen} t - 3 & -\cos t \end{pmatrix}}{\|\alpha'(t)\|^3} \to \text{NEL PUNTO } t=0$$

$t=0$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{1+t} = \frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Big/ \left(\sqrt{4+9}\right)^3 = \frac{-5}{13^{3/2}}$$ ✓

AUTOVALORI E DIAGONALIZZAZIONI

$\operatorname{tr}(A)$ = SOMMA DI TUTTI GLI ELEMENTI DELLA SUA DIAGONALE PRINCIPALE $\quad \det(A) =$

TRACCIA DELLA MATRICE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+d$ $\qquad P_A = t^2 - t\operatorname{tr}(A) + \det(A)$

(t^2 FISSO; $-$ SEGNO OPPOSTO A QUELLO DA $\operatorname{tr}(A)$)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = A$ $\quad \operatorname{tr}(A) = -1$

$\det(A) = -2 - 10 = -12$

$P_A = t^2 + t - 12$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(-12)}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{matrix} -4 = \lambda_1 \\ 3 = \lambda_2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = -4x \\ x + 2y = 3x \end{cases} \begin{cases} 5x = -2y \\ y = x \end{cases} \begin{cases} x = -\frac{5}{5}y \\ w\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$v\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$P_f(t) = \det_-(t \cdot Ident_V - f) \in K[t]$.

$P_A(t) = \det_-(t \cdot Ident_A - A)$

es.

$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $P_A(t) = \det_-\left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t-6 & -4 \\ 2 & t+3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow (t-6)(t+3)+8 \rightarrow t^2-3t-10 \rightarrow (t-5)(t+2)$ $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -2$

matrice triangolare gli autovalori sono sulla diagonale

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ * & \lambda_2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ autovettori

$A \cdot v_1 = 5 \cdot v_1$

$A \cdot v_1 = +2 \cdot v_1$

$\begin{cases} 6x_1 + 4y_1 = 5x_1 \\ -2x_1 - 3y_1 = 5y_1 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 4y_1 = 0 \\ \end{cases} \begin{cases} x_1 = -4y_1 \\ \end{cases} \rightarrow v_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $P_A = \underset{2\times 2}{\text{matrice}}\, t^{(2)} - \underset{\text{tr}A}{9}t \cdot \det A = t^2 - 9t + 26$

$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(26)}}{2}$ — su $\mathbb{R}$ ∄; esistono su $\mathbb{C}$ $\rightarrow \frac{1}{2}(9 \pm i\sqrt{23})$

master COPY COPISTERIA 050/8312126 388/9837745

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745